

CRITÉRIO DE SELEÇÃO DE MODOS COMPLEXOS APLICADO A UM MÉTODO DE SÍNTESE MODAL GENERALIZADO – PARTE I : SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Cleudmar A. de Araújo

Universidade Federal de Uberlândia , Departamento de Engenharia Mecânica
Cx. P. 593 - 38400-089 - Uberlândia, MG, Brasil

Paulo R. G. Kurka

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Projeto Mecânico
Cx. P. 6122 - 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

***Resumo.** Este trabalho apresenta uma técnica de síntese modal generalizada aplicada a sistemas não conservativos utilizando o superconjunto modal de flexibilidade residual. A metodologia pode ser realizada em uma abordagem analítica, porém, é indicada, principalmente, na análise experimental. É proposto um critério de eliminação de modos complexos com a finalidade de evitar a interferência do usuário, automatizando o processo de síntese. Nos métodos de síntese modal, a indicação quantitativa e qualitativa dos modos das subestruturas que ficarão dentro da faixa de análise, tem um papel importante na precisão da identificação. Como o processo é feito arbitrariamente pelo usuário, o que pode ocorrer é uma não seleção de determinados modos de uma subestrutura que possuem uma alta sensibilidade para a convergência da síntese final. O critério é definido através de um índice de qualidade, calculado através de uma pesagem cruzada entre os vários modos das subestruturas conectadas. Esta pesagem cruzada é feita utilizando uma ponderação dos modos individuais de cada subestrutura, através da norma Euclidiana. A síntese das subestruturas é feita utilizando um processo otimizado de remontagem global. A técnica proposta e o critério de eliminação são validados através da análise numérica de um modelo discreto massa-mola-amortecedor de seis graus de liberdade.*

***Palavras-chave:** Síntese modal, Superconjunto modal, Flexibilidade residual, Identificação, Análise experimental.*

1. INTRODUÇÃO

A análise de estruturas de engenharia depende essencialmente do tipo de modelo matemático que é utilizado para descrever o comportamento físico do sistema. Com o desenvolvimento de computadores digitais de alta velocidade e alta capacidade de memória, aliados a métodos numéricos mais eficientes, os projetistas têm conseguido solucionar problemas estruturais complexos ou de grande porte. As características dinâmicas de uma estrutura podem ser obtidas através de técnicas de modelagem de sistemas que utilizam dados experimentais ou dados analíticos. Uma vez que o modelo foi obtido, diferentes aplicações podem ser estudadas, como por exemplo, mudanças no projeto, acoplamento de uma estrutura em outra para determinar o comportamento dinâmico global e a análise da resposta do sistema a uma excitação externa.

O método de síntese modal é uma técnica apropriada para a modelagem de grandes estruturas, pois além de reduzir a ordem da equação de movimento do sistema, utiliza subestruturas completamente independentes, devido ao seu princípio de modularidade. Nesta metodologia, o sistema completo é subdividido em diferentes componentes, cujas bases modais reduzidas são agrupadas e sintetizadas com a finalidade de obter os seus parâmetros dinâmicos. Desde o trabalho original de Hurty (1965) que introduziu a técnica de síntese dos

modos do componente, diferentes métodos de subestruturação têm sido publicados na literatura, como por exemplo, (Macneal, 1971), (Rubin, 1975), (Arruda e Santos, 1993). Na aplicação desta técnica, geralmente, assume-se que os sistemas não são amortecidos ou possuem amortecimento proporcional. Esta suposição define equações de movimento desacopladas com autovalores e autovetores reais. No entanto, existe uma classe de problemas em que o amortecimento não é proporcional. Neste caso, a solução das equações é obtida utilizando formulação complexa, onde geralmente, o sistema é descrito em forma de equações de estado de primeira ordem. Dentre os trabalhos publicados que utilizam uma base modal complexa destacam-se, (Hasselman e Kaplan, 1974), (Craig e Chung, 1981), (Martin e Ghilain, 1984). Em recentes trabalhos, Craig (1987) e Duarte (1994) mostraram que o melhor superconjunto modal aplicado na análise experimental é o superconjunto modal de flexibilidade residual. Um inconveniente deste processo é a escolha adequada dos modos normais que serão mantidos na base modal e aqueles restantes que serão escolhidos para obtenção dos modos de flexibilidade residual. Se esta escolha não for correta, a base modal identificada não simulará adequadamente a base modal real da estrutura completa.

Recentemente, os autores publicaram, uma metodologia de síntese modal aplicada a sistemas sem amortecimento, introduzindo um critério de seleção automática de modos, através da definição de um peso individual de cada modo das subestruturas (Araújo e Kurka, 1995 e 1998). A vantagem da utilização deste critério é a possibilidade de eliminar a interferência do usuário e automatizar o processo de síntese modal.

O presente trabalho apresenta um método generalizado de síntese modal (Araújo, 1998) que utiliza o superconjunto modal de flexibilidade residual direcionado para sistemas com amortecimento geral. O processo de síntese é feito através de um procedimento otimizado de remontagem das subestruturas. Juntamente com esta técnica é desenvolvido um novo critério para seleção automática de modos, através de uma ponderação cruzada entre os vários pesos modais individuais das subestruturas interconectadas. O processo é validado através da simulação numérica de um sistema discreto massa-mola-amortecedor.

2. SUPERCONJUNTO MODAL DE FLEXIBILIDADE RESIDUAL

Para sistemas não amortecidos ou com amortecimento proporcional, os modos de flexibilidade residual são valores reais e são obtidos a partir da matriz de flexibilidade (G_e), que pode ser definida pela inversa da matriz de rigidez (K) do sistema ou a partir de seus autovalores e autovetores flexíveis selecionados (θ_{fk}) e não selecionados (θ_{fu});

$$G_e = K^{-1} = \theta_f A_f^{-1} \theta_f^t = \theta_{fk} A_{fk}^{-1} \theta_{fk}^t + \theta_{fu} A_{fu}^{-1} \theta_{fu}^t \quad (1)$$

O segundo termo da “Eq.(1)” é denominado de matriz de flexibilidade residual (G_f), e representa a flexibilidade da estrutura relativa aos modos não selecionados ou fora da faixa de análise. Logo,

$$G_f = \theta_{fu} A_{fu}^{-1} \theta_{fu}^t \quad (2)$$

Os graus de liberdade de cada subestrutura são associados às coordenadas internas (u_i) e do contorno (u_b) e a matriz de restrições (f_b) de ordem ($n \times n_b$) é obtida considerando-se deslocamentos unitários nas coordenadas do contorno e deslocamentos nulos nas coordenadas internas. Com isso, os modos de flexibilidade residual são obtidos pré-multiplicando a matriz de restrições pela matriz de flexibilidade residual da seguinte forma:

$$\delta_r = \theta_{fu} A_{fu}^{-1} \theta_{fu}^t f_b = \theta_{fu} A_{fu}^{-1} \theta_{fub}^t \quad (3)$$

A matriz de rigidez e a matriz de massa generalizadas das subestruturas quando associadas aos modos de flexibilidade residual, podem ser escritas como:

$$\alpha_{rr} = \delta_r^t K \delta_r = \theta_{fub} A_{fu}^{-1} \theta_{fub}^t \quad e \quad \beta_{rr} = \delta_r^t M \delta_r = \theta_{fub} (A_{fu}^{-1})^2 \theta_{fub}^t \quad (4)$$

A “Equação(4)” mostra que as matrizes de rigidez e de massa podem ser simuladas através das parcelas modais não selecionadas quando associadas aos modos de flexibilidade residual. Esta particularidade torna esta base modal indicada para a análise experimental, já que não há a necessidade de conhecimento dos parâmetros físicos do sistema. O superconjunto modal de flexibilidade residual é formado a partir dos modos de flexibilidade residual e dos modos flexíveis mantidos na seguinte forma:

$$\Psi = [\delta_r \quad \theta_{fk}] \quad (5)$$

3. MÉTODO DE SÍNTESE MODAL

A forma de forçar o acoplamento entre as subestruturas e o tipo de base modal utilizada são os parâmetros mais importantes na técnica de síntese modal. A técnica desenvolvida neste trabalho é uma extensão do método de Craig-Chang (1977), porém é generalizada para sistemas com amortecimento não proporcional. Além disso, o método utiliza um procedimento diferenciado de acoplamento entre as subestruturas. As equações de movimento das subestruturas são transformadas em equações de estado de primeira ordem e o superconjunto modal de flexibilidade residual é utilizado para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais. Para a aplicação da técnica de síntese modal proposta, suponha que dois componentes (a) e (b) sejam ligados por uma interface comum, para formarem uma estrutura global, como mostrado na “Fig. 1”. Estas subestruturas são discretizadas utilizando coordenadas físicas internas (u_i) e de contorno (u_b).

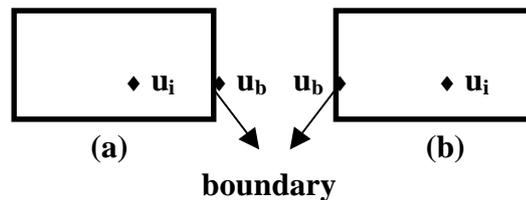


Figura 1 - Subestruturas (a) e (b) discretizadas e interligadas por uma interface comum.

A equação de movimento de uma subestrutura, supondo amortecimento geral, pode ser definida por:

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ib} \\ m_{bi} & m_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ib} \\ c_{bi} & c_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ib} \\ k_{bi} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_i \\ f_b \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Ou de forma genérica: $M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = f$

A forma mais conveniente de solução da “Eq.(6)” é utilizar a formulação de estado (Santos, 1993), ou seja;

$$A \dot{v} + B v = P \quad (7)$$

$$\text{Onde: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} ; \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} ; \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

A solução homogênea da “Eq.(7)” fornece os autovalores e os autovetores complexos do sistema físico. As coordenadas físicas (\mathbf{v}) são substituídas pelas coordenadas modais ($\boldsymbol{\eta}$) através da seguinte transformação linear:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{ri} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fki} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{rb} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fkb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_r \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{Bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\Psi}} \boldsymbol{\eta} \quad (8)$$

Os modos de flexibilidade residual complexos ($\hat{\boldsymbol{\delta}}_r$) são similares àqueles definidos pela “Eq.(3)”. Da mesma forma, possuem as seguintes propriedades:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{rr} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_r^t \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\delta}}_r = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fub}^t \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{fu}^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fub} \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rr} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_r^t \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\delta}}_r = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fub}^t \left(\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{fu}^{-1} \right)^2 \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fub} \quad (9)$$

Finalmente, a equação de movimento de cada componente em termos das coordenadas modais pode ser obtida como:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}^t \mathbf{P} \quad (10)$$

Onde: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}^t \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}$ e $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\Psi}}^t \mathbf{B} \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{rr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{kk} \end{bmatrix}$

A equação de movimento para as duas subestruturas conectadas é uma extensão da “Eq.(10)”, sendo definida por:

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}} \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \bar{\boldsymbol{\eta}} = \bar{\mathbf{E}}^t \bar{\mathbf{P}} \quad (11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rr}^a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rr}^b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{kk}^b \end{bmatrix}; \hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{rr}^a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{rr}^b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{kk}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{kk}^b \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{ri}^a & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fki}^a & \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{rb}^a & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fkb}^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\delta}}_{ri}^b & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fki}^b \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\delta}}_{rb}^b & \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{fkb}^b \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \{0^a \quad \mathbf{f}_b^a \quad 0^b \quad \mathbf{f}_b^b\}^t ; \bar{\boldsymbol{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta}_r^a \quad \boldsymbol{\eta}_r^b \quad \boldsymbol{\eta}_k^a \quad \boldsymbol{\eta}_k^b\}^t$$

Aplicando-se uma condição “pseudo-estática” (Craig, 1981) nas equações de movimento do sistema, as coordenadas generalizadas podem ser aproximadas pelas forças internas de contorno. Desta forma, as equações de compatibilidade entre as subestruturas podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_b^a - \mathbf{u}_b^b = 0 \\ \boldsymbol{\eta}_r^a - \boldsymbol{\eta}_r^b = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Através das “Eqs. (11) e (12)”, obtém-se a matriz de compatibilidade (\bar{R}), que pode ser dividida em parcelas de coordenadas dependentes (C_{db}) e coordenadas independentes (C_{ik}), da seguinte forma:

$$\bar{R} \bar{\eta} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{rb}^a & -\hat{\delta}_{rb}^b & \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^b \\ I^a & I^b & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\eta} = [C_{db} \quad ; \quad C_{ik}] \bar{\eta} = 0 \quad (13)$$

As coordenadas modais ($\bar{\eta}$) são definidas na “Eq.(11)”. As parcelas de coordenadas modais mantidas são utilizadas para efetuar uma nova transformação linear no sistema, da seguinte forma:

$$\bar{\eta} = \bar{S} \hat{p} \quad \text{sendo} \quad \hat{p} = \begin{Bmatrix} \eta_k^a \\ \eta_k^b \end{Bmatrix} \quad (14)$$

A matriz de conectividade geral (\bar{S}) é obtida através das “eqs. (13) e (14)”, sendo:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} -C_{db}^{-1} C_{ik} \\ I_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \hat{\theta}_{fkb}^a & D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ D \hat{\theta}_{fkb}^a & -D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ I_{kk}^a & 0 \\ 0 & I_{kk}^b \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad D = (\hat{\delta}_{rb}^a + \hat{\delta}_{rb}^b)^{-1} \quad (15)$$

Através das “eqs. (11), (14) e (15)” obtém-se a equação homogênea global de movimento do sistema:

$$\hat{M} \ddot{\hat{p}} + \hat{K} \hat{p} = 0 \quad (16)$$

$$\hat{M} = \bar{S}^t \hat{\Delta} \bar{S} = \begin{bmatrix} I_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & I_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix}; \quad \hat{V} = D^t (\hat{\beta}_{rr}^a + \hat{\beta}_{rr}^b) D$$

$$\hat{K} = \bar{S}^t \hat{F} \bar{S} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & \hat{\Lambda}_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix}$$

A “Equação(16)”, representa a equação de movimento sintetizada do sistema completo e a sua solução fornece autovalores e autovetores complexos. A base modal original do sistema pode ser obtida através de um processo retroativo de transformações lineares.

3.1 Processo de remontagem das subestruturas

Para estruturas grandes ou complexas, o procedimento de remontagem de todas as subestruturas visando sintetizar a estrutura completa pode influenciar significativamente na precisão da identificação, uma vez que as matrizes finais, sendo de elevada ordem, implicam uma diminuição da eficiência computacional e os inerentes erros de truncamento gerados podem, inclusive, implicar uma não convergência da síntese final. Neste trabalho, a síntese inicial é feita, numa primeira etapa, através de duas subestruturas conectadas. Se a estrutura real que está sendo analisada for composta de três ou mais subestruturas, as duas subestruturas inicialmente analisadas são remontadas como uma nova subestrutura hipotética. Esta subestrutura hipotética estará, naturalmente, conectada a uma terceira subestrutura, com

as coordenadas do contorno sendo idênticas às da nova subestrutura formada. Este processo acumulativo de remontagem de subestruturas segue, até que, todas as subestruturas sejam conectadas de maneira a formar a estrutura completa. A vantagem deste procedimento é que as matrizes globais finais que são utilizadas na solução do autoproblema, são sempre calculadas para duas subestruturas atualmente conectadas, independente do número de subestruturas que compõe a estrutura completa.

4. CRITÉRIO DE ELIMINAÇÃO DE MODOS COMPLEXOS

Nos processos de síntese modal que utilizam o superconjunto modal de flexibilidade residual, o usuário define, aleatoriamente, quais modos deseja retirar da base modal. Estes modos não selecionados vão ser utilizados para definir os modos de flexibilidade residual. Neste caso, mesmo mantendo-se um número suficiente de modos na base, corre-se o risco de selecionar modos que seriam de baixa sensibilidade para a identificação dinâmica do sistema original. O critério de eliminação automática de modos apresentado no trabalho de Cleudmar (1998) é definido através da formulação de um índice qualitativo para os modos das subestruturas, baseado em uma ponderação entre o nível de energia modal do contorno com o nível de energia modal das parcelas internas das subestruturas. Através de observações das formas modais resultantes da estrutura completa, verificou-se que para cada subestrutura isolada, quanto menor a energia das coordenadas do contorno relativamente à energia das coordenadas internas, para um determinado modo, menor era a influência deste modo nos resultados finais. Esta suposição é fundamentada no fato de que as parcelas internas de energia dos modos selecionados são as principais responsáveis pelo movimento de vibração do sistema completo, já que as parcelas relativas do contorno ficarão naturalmente sujeitas às condições impostas pelo acoplamento. Portanto, a manutenção dos modos que possuem menor influência nos graus de liberdade físicos do contorno representam uma conservação da informação de menor incerteza das bases modais que irão compor a estrutura completa.

4.1 Peso relativo dos modos

As coordenadas generalizadas podem ser relacionadas com as coordenadas físicas do sistema da seguinte forma:

$$q = \begin{bmatrix} (\theta_{fi}^{-1})^t & (\theta_{fb}^{-1})^t \end{bmatrix} M \begin{Bmatrix} u_i \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Na “Equação(17)”, as partições da matriz inversa da base modal referem-se às parcelas das coordenadas físicas internas e do contorno de uma subestrutura. O peso relativo dos modos individuais de cada subestrutura (ε^m) é definido através da norma L_2 (Kreyszig, 1993), como:

$$\varepsilon^m = \frac{\|(\theta_{fb}^{-1})^t\|_2}{\|(\theta_{fi}^{-1})^t\|_2} = \frac{\sqrt{|\theta_{1j}^{-1}|^2 + |\theta_{2j}^{-1}|^2 + \dots + |\theta_{fbj}^{-1}|^2}}{\sqrt{|\theta_{1j}^{-1}|^2 + |\theta_{2j}^{-1}|^2 + \dots + |\theta_{fij}^{-1}|^2}} \quad (18)$$

4.2 Peso associado dos modos

A “Equação(18)” é geral, sendo válida para sistemas sem amortecimento ou com amortecimento não proporcional, sendo que, neste caso, as parcelas modais são computadas através do módulo de um número complexo. Uma vez escolhida a quantidade de modos a serem mantidos, utilizando a “Eq.(18)”, tem-se uma primeira classificação destes modos para cada subestrutura, através de uma varredura de seus (m) modos. No entanto, o movimento resultante da estrutura completa é devido ao acoplamento mútuo entre os vários modos das

subestruturas conectadas. Com isso, mesmo que um modo isolado de uma subestrutura possua uma influência pequena no contorno, quando este modo for, naturalmente, associado com os outros modos da outra subestrutura conectada, esta vinculação pode acarretar um aumento do nível de energia de deflexão no contorno. Esta influência foi medida levando-se em conta um outro peso que fornece um índice de qualidade modal final.

Considerando, inicialmente, duas subestruturas conectadas, o peso final de cada modo é definido através de um somatório mútuo entre os vários pesos modais de cada subestrutura conectada. Estes pesos modais individuais são obtidos pela “Eq. (18)”. Por exemplo, para duas subestruturas (a e b) conectadas, a influência dos modos da subestrutura (b) sobre um j-ésimo modo da subestrutura (a) (Z^x), supondo o movimento na direção x, é definida pela diferença em módulo dos pesos modais individuais:

$$Z^x_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} \left| \varepsilon_x^1 - \varepsilon_x^1 \right| & \left| \varepsilon_x^2 - \varepsilon_x^1 \right| & \cdots & \left| \varepsilon_x^m - \varepsilon_x^1 \right| \\ \left| \varepsilon_x^1 - \varepsilon_x^2 \right| & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \left| \varepsilon_x^1 - \varepsilon_x^n \right| & \cdots & \cdots & \left| \varepsilon_x^m - \varepsilon_x^n \right| \end{bmatrix} \quad (19)$$

Na “Eq.(19)”, (m) indica o número de modos da subestrutura (a) e (n) indica o número de modos da subestrutura (b). O somatório dos termos de cada coluna da matriz (Z^x) fornece uma ponderação inicial, na direção (x), sobre a combinação de um modo específico da subestrutura (a) com os outros modos da outra subestrutura (b) conectada. Este resultado pode ser obtido de maneira similar para as outras direções (y e z). Então para um j-ésimo modo da subestrutura (a), tem-se que:

$$N_x^j = \sum_{i=1}^n Z_{ji}^x ; N_y^j = \sum_{i=1}^n Z_{ji}^y ; N_z^j = \sum_{i=1}^n Z_{ji}^z \quad (20)$$

Finalmente, o peso final de cada j-ésimo modo de uma dada subestrutura é obtido por:

$$N^j = \sqrt{\left| N_x^j \right|^2 + \left| N_y^j \right|^2 + \left| N_z^j \right|^2} \quad (21)$$

Portanto, o critério prevê que um valor alto para o peso (N^j) de um modo (j) da subestrutura, definido pela “Eq.(21)”, representa uma maior influência na região do contorno entre as subestruturas conectadas. Se na região de conexão entre as subestruturas esta influência for menor, a tendência é que a energia dos nós internos das subestruturas preservem o movimento da estrutura global e um critério consistente é a eliminação dos valores de maior influência no contorno, ou seja, aqueles modos de maior peso.

5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

As metodologias propostas neste trabalho foram implementadas em um código computacional, elaborado em linguagem Fortran, e denominado de Programa Struct (Araújo, 1998). Este software foi utilizado para obter os parâmetros dinâmicos de um modelo analítico discreto, mostrado na “Fig. 3”. A estrutura completa é subdividida em duas subestruturas, com 5 e 3 graus de liberdade, respectivamente. Neste caso, existem duas coordenadas de contorno, sendo três coordenadas internas para a subestrutura (1) e uma coordenada interna para a subestrutura (2). A “Tabela 1”, apresenta os autovalores das subestruturas, obtidos através do Programa Struct e os autovalores da estrutura completa, obtidos através do Programa Matlab (1980), com os respectivos pesos modais determinados pelo critério de eliminação automática. Os modos complexos de cada subestrutura não são apresentados. Neste caso, eliminaram-se 4 modos da subestrutura (1) e 2 modos da subestrutura (2), correspondendo a 40 % e 33,3% do total dos respectivos modos.

$m_1=m_2=m_3= 10 \text{ kg}$
 $m_4=m_5=m_6= 10 \text{ kg}$

$k_1=k_3=k_5= 10000 \text{ N/m}$
 $k_2=k_6=k_7= 20000 \text{ N/m}$
 $k_8= 12000 \text{ N/m}$
 $k_4= 15000 \text{ N/m}$

$c_1=c_4= 3 \text{ N.s/m}$
 $c_2= 5 \text{ N.s/m}$
 $c_5= 7 \text{ N.s/m}$
 $c_7= 12,5 \text{ N.s/m}$
 $c_8= 10 \text{ N.s/m}$

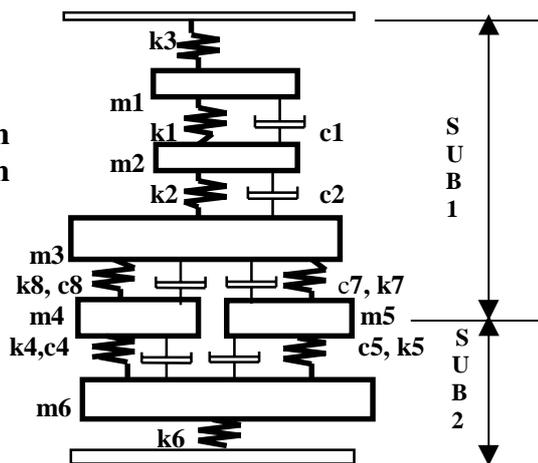


Figura 3 - Sistema massa-mola-amortecedor analisado.

Tabela 1. Autovalores das subestruturas e da estrutura completa.

Autovalores (rd/s)			Pesos	
Sub 1	Sub 2	Estrut. Completa	Sub1	Sub2
0,01 ± 10,0 i	0,04 ± 21,5 i	0,02 ± 15,5 i	15,64	15,03
0,34 ± 36,0 i	0,28 ± 34,9 i	0,24 ± 34,7 i	15,62	61,56
0,37 ± 40,2 i	0,68 ± 72,9 i	0,33 ± 37,9 i	15,32	4,375 ←
0,58 ± 56,5 i	-----	0,51 ± 54,2 i	17,05 ←	-----
1,75 ± 84,9 i	-----	0,59 ± 69,9 i	17,34 ←	-----
-----	-----	1,56 ± 82,8 i	-----	-----

A “Tabela 2”, apresenta uma comparação entre os resultados sintetizados pelo Programa Struct e os resultados reais do sistema completo, utilizando o critério de eliminação automática (CEA), definidos na “Tabela 1”. Observa-se que foram identificados 8 modos com erro relativo entre os autovalores inferior a 5% e 6 modos com índice MAC (Ewins, 1994) superior a 0,8 correspondendo a 66,7 % e 50 % do total de modos do sistema completo, respectivamente. As linhas tracejadas da tabela representam os autovalores e autovetores que não foram identificados pelo processo de síntese modal.

Tabela 2. Resultados da síntese utilizando o critério de eliminação automática.

Autov. do Sistema (rd/s)	Autov. Sintetizados (rd/s)	Erro Relativo (%)	MAC
0,02 ± 15,5 i	0,03 ± 15,6 i	0,09	0,99
0,24 ± 34,7 i	0,15 ± 35,7 i	2,98	0,84
0,33 ± 37,9 i	-----	-----	-----
0,51 ± 54,2 i	0,79 ± 51,8 i	4,43	0,02
0,59 ± 69,9 i	0,47 ± 69,5 i	0,56	0,87
1,56 ± 82,8 i	-----	-----	-----
Valores Médios		2,02	0,68

Uma averiguação mais criteriosa foi feita através da avaliação de todas as configurações possíveis de seleção de modos das subestruturas. Para o exemplo simulado, é possível definir oito configurações diferentes de modos selecionados e não selecionados para as duas subestruturas. A “Fig. 4”, apresenta as diferentes combinações para uma destas configurações, em função dos índices de MAC médio para os autovetores e em função dos respectivos erros relativos médios para os autovalores identificados. Esta configuração é obtida selecionando-se dois modos para a subestrutura (1) e quatro modos para a subestrutura (2). Neste caso, serão descartados um modo para a subestrutura (1), ou seja, 33% dos modos e um modo para a subestrutura (2), ou seja, 20% dos modos. Com isso, existem quinze combinações possíveis entre estes modos.

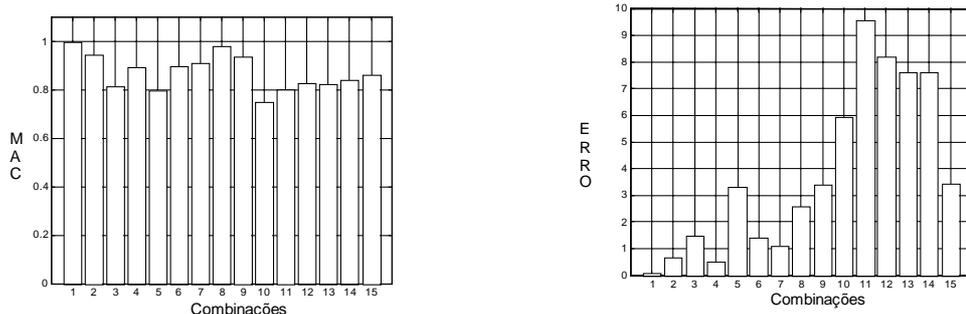


Figura 4 - MAC médio e erro relativo médio para as configurações (1) e (2).

Na “Fig. 4”, para a combinação de modos devida ao critério de eliminação automática, combinação (11), o MAC médio foi aproximadamente de 0,85 e o erro relativo médio inferior a 2%. Através deste diagrama, pode-se observar como a sensibilidade da escolha de uma determinada base modal pode influir nos resultados. Para outras configurações, não mostradas aqui, cujas quantidades de modos descartados da base são maiores, ocorre um aumento considerável desta sensibilidade. Analisando os resultados anteriores, observa-se que o método de síntese modal generalizado proposto converge para resultados satisfatórios e que na maioria dos casos o CEA não foi, necessariamente, a melhor condição de combinação de modos. Porém, sempre situou-se próximo daquelas melhores combinações de modos selecionados/eliminados. Verificou-se que quanto maior a quantidade de modos selecionados na base, melhor o comportamento do CEA.

6. CONCLUSÕES

O trabalho apresentou um método generalizado de síntese modal para sistemas com amortecimento geral que pode ser aplicado em uma abordagem analítica, porém é potencialmente direcionado para a análise experimental de grandes estruturas. Os modos de flexibilidade residual foram construídos utilizando uma formulação generalizada em sistemas não conservativos. O critério de remontagem das subestruturas mostrou-se eficiente, convergindo, na maioria dos casos, para resultados satisfatórios. Uma das grandes vantagens deste procedimento é que ele pode ser aplicado a outras técnicas de síntese modal.

O critério de eliminação de modos complexos implementado indica quais os modos das subestruturas devem ser selecionados ou eliminados, através da determinação de um peso modal específico. A indicação destes modos selecionados ou não selecionados das subestruturas, é um fator decisivo para a obtenção de precisão na síntese final. Verificou-se que o critério proposto é uma das possibilidades de escolha das bases modais apropriadas que poderiam ser utilizadas no processo de síntese, não descartando, porém, a possibilidade de existência de outras bases modais que também poderiam levar a resultados satisfatórios.

Afim de melhorar este índice de qualidade de modos, outras análises têm que ser feitas, como por exemplo, avaliar a metodologia através de ensaios experimentais e introduzir um fator de pesagem dos modos das subestruturas por bandas de frequência.

7. REFERÊNCIAS

- Araújo, C. A. e Kurka, P. R. G., 1995, Dynamical Modeling Through Time domain Identification and Substructuring Techniques, Anais do DINAME 95, VI Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, ABCM, pp. 6 - 8.
- Araújo, C. A., 1998, Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP,

Brasil.

- Arruda, J. R. F. and Santos, J. M. C., 1993, Experimental Estimation of Mechanical Joint Parameters Using Frequency Response Functions and Modal Parameters, 11 th. Int. Conf. on Modal Analysis IMAC, pp. 1502-1507.
- Craig, Jr., R. R., and Chang, C. J., 1977, On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis, AIAA/ASME 18th Struct., pp. 89-99.
- Craig, Jr., R. R., 1987, A Review of Time-Domain and Frequency-Domain Component Mode Synthesis Methods, J. of Modal Analysis, pp. 59-72.
- Craig Jr., R. R., 1981, Structural dynamics - An introduction to computer methods, J. Wiley, New York.
- Duarte, M. A. V., 1994, Ajuste de Modelos de Dinâmicos de Estruturas com Não Linearidades Concentradas, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Ewins, D. J., 1994, Modal Testing: Theory and Practice, J. Wiley, New York.
- Hasselmann, T. K. & Kaplan, A., 1974, Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis, Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Sept., pp. 307-333.
- Hurty, W. C., 1965, Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes, AIAA J., vol. 3, n. 4, pp. 678 - 685.
- Kreyszig, E., 1993, Advanced Engineering Mathematics, J. Wiley, 7a. ed., New York.
- Kurka, P. R. G. and Araújo, C. A., 1998, Practical application of a selection criteria for constructing the superset of residual flexibility modes used in modal synthesis method, ISMA 23, Internatinal Conference on Noise and Vibration Engineering, Sept., Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, pp. 16-18.
- Macneal, R. H., 1971, A Hibrid Method of Component Mode Synthesis. Computers & Struct., vol. 1, n. 4, pp. 581-601.
- Martim, K. F. and Ghilaim, K. M., 1984, System prediction using damped component modes, Proc. Int. Mech. Engrs., March, vol. 198C, n. 16, pp. 261-268.
- Matrix Laboratories, 1980, Programa Matlab, versão 4.2c.1, The Mathworks Inc.
- Rubin, S., 1975, Improved Component Mode Representation for Structural Dynamic Analysis, AIAA J., vol. 13, n. 8, pp. 995-1006.
- Santos, J. M. C., 1993, Ajuste de Modelos de Estruturas Acopladas por Juntas Mecânicas Usando Funções de Resposta em Frequência e Síntese Modal de Componentes, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

COMPLEX MODES SELECTION CRITERIA APPLIED TO THE GENERALIZED MODAL SYNTHESIS METHOD – PART I : NUMERICAL SIMULATION

Abstract. This work presents a generalized method of modal synthesis applied to non conservative systems using residual flexibility modal supersets. Although this method is used more frequently for experimental analysis, it can be used in a analytical approach. A complex modes of elimination criterion is proposed in order to avoid the user influence by automating the synthesis process. In the modal synthesis methods, the quantitative and qualitative indication of substructure modes that are inside the analysis range is very important to the identification process. Since the process is made arbitrarily by the user, some modes of a substructure that have high sensitivity to final synthesis convergence may be not selected. The criterion is defined using a quality index that is calculated by a cross weighing among the modes of connected substructures. The Euclidean norm is used to obtain a initial weight to individual modes of substructures, which are used in the cross weighing. The synthesis of substructures is made using a optimized process of global reassembling. A discrete model of six degrees of freedom is used to validate the method proposed and the elimination criterion.

keywords: Modal synthesis, Modal superset, Residual flexibility, Identification, Experimental Analysis.